

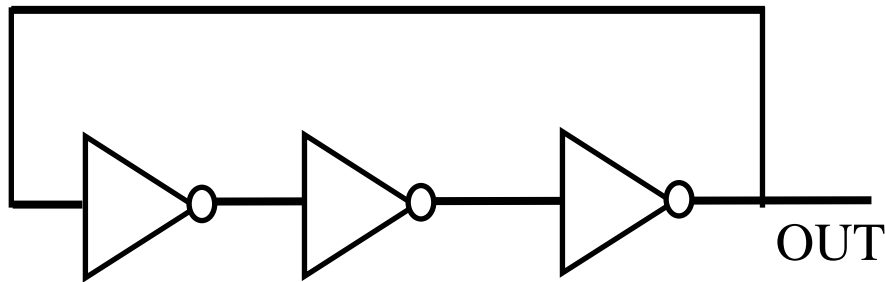
量子デバイス工学

位相雑音(Phase Noise)

1. 位相雑音の定義
2. 位相雑音の重要性
3. 位相雑音のモデル
4. 位相雑音の測定原理

半導体素子を用いた発振回路

Ring Oscillator



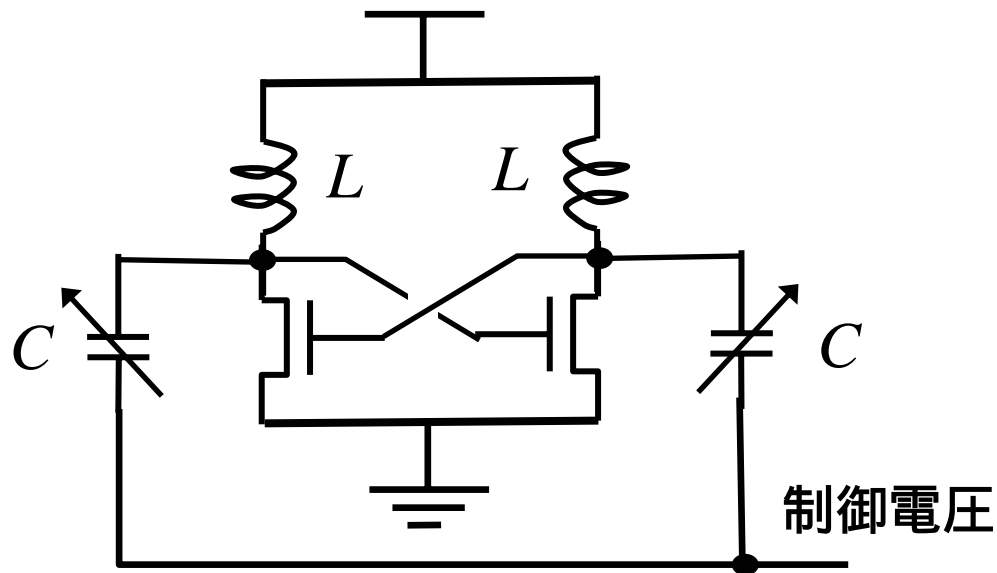
奇数段のインバータ

発振周波数

$$f_{osc} = \frac{1}{2N\tau_{delay}}$$

N : インバータの段数

τ_{delay} : インバータ1段当りの遅延時間



$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

1.位相雑音の定義

位相雑音の定義

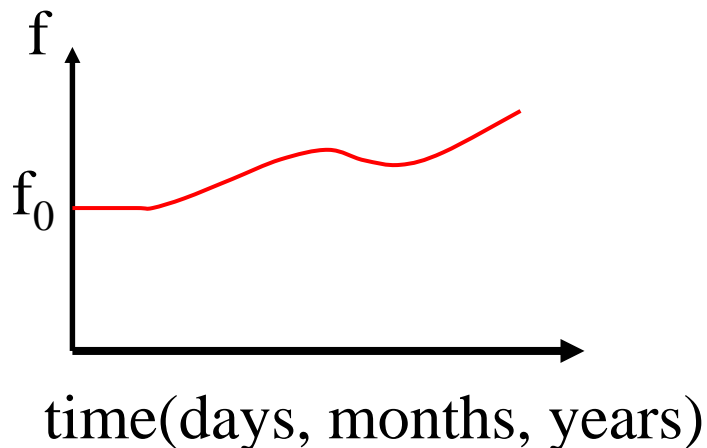
周波数ドメインにおける周波数の不確かさ

位相雑音の表現

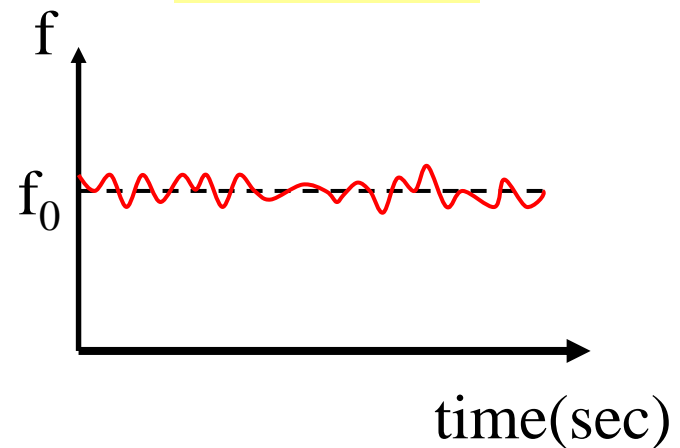
- ・長期安定度: 信号源のエージング(年月日単位)
- ・環境による周波数変動: 圧力, 温度, 湿度等
- ・短期安定度: 数秒以内の瞬時周波数変動 →

通常, これを位相雑音として計測する

長期安定度

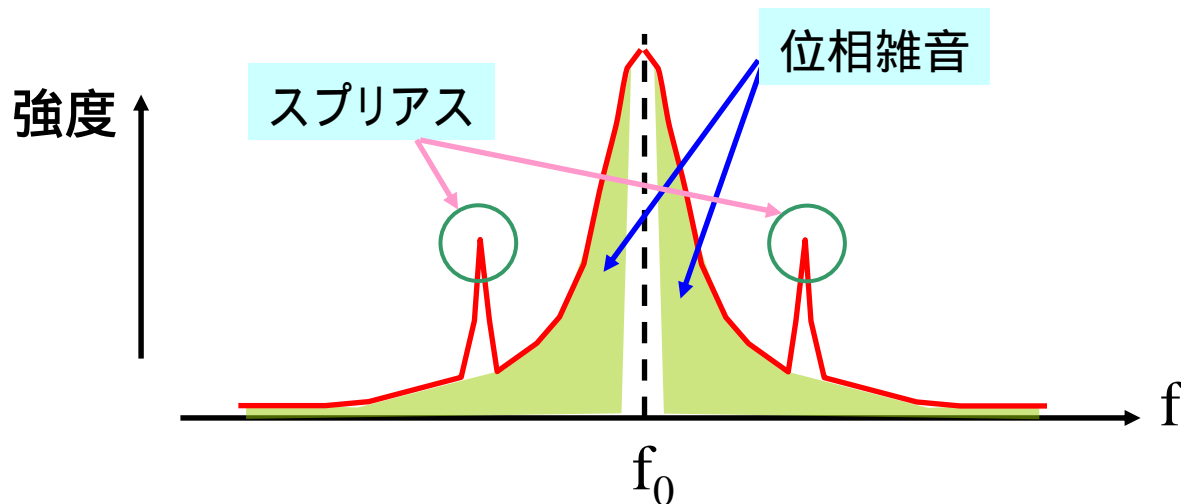


短期安定度



短期周波数変動:サイドバンドに位相変調(Phase Modulation, PM)として現れる

1. ランダム信号による位相変調 (一般に、“位相雑音”(phase noise)と呼ばれる)
 - ・ 雑音により搬送波に変調される
 - ・ 連続スペクトル
 - ・ 測定電力は帯域幅に比例
2. 周波数雑音による位相変調 (一般に、“スプリアス”(spurious)と呼ばれる)
 - ・ 一定の変調周波数により生じる (電源変動, 機械的振動, 交流磁界など)
 - ・ 測定電力は帯域幅とは無関係



信号の雑音の数学的表現

理想信号

$$V(t) = A \sin 2\pi f_0 t$$

実際の信号

$$V(t) = (A + \underline{E(t)}) \sin(2\pi f_0 t + \underline{\phi(t)})$$

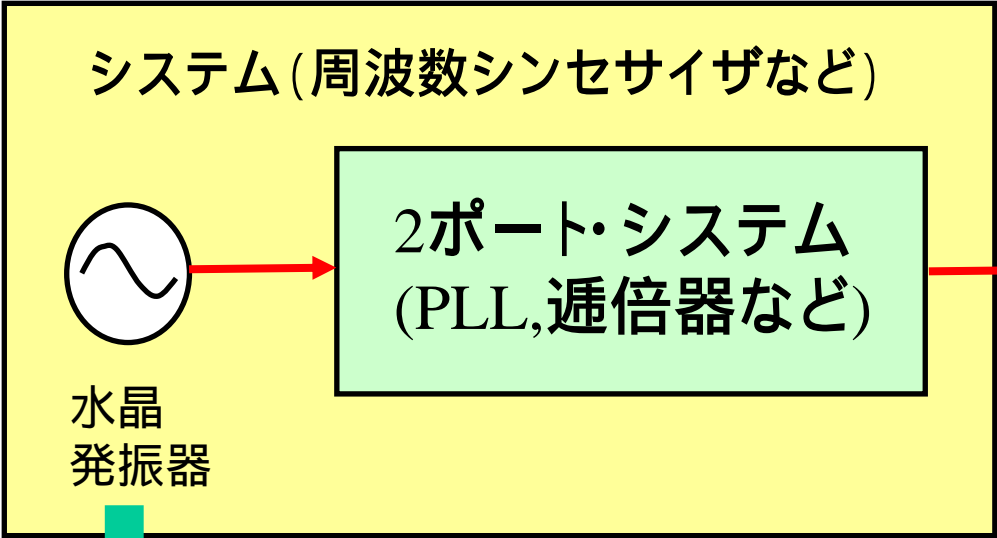
振幅変動
(AM雑音)

位相変動
(PM雑音)

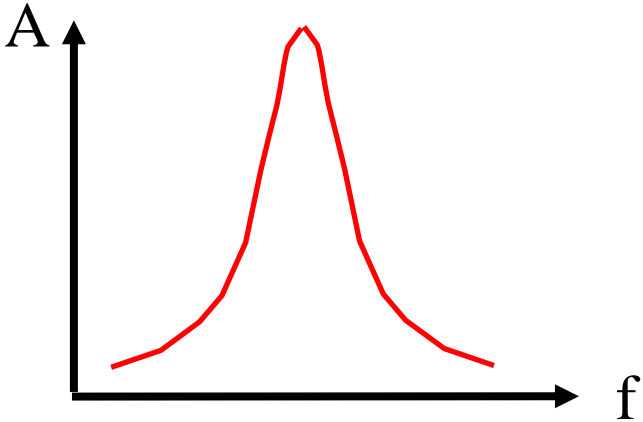
位相雑音

位相雑音の正確な評価には、AM雑音とPM雑音の区別が必要
単なるスペクトラム・アナライザでは不可能

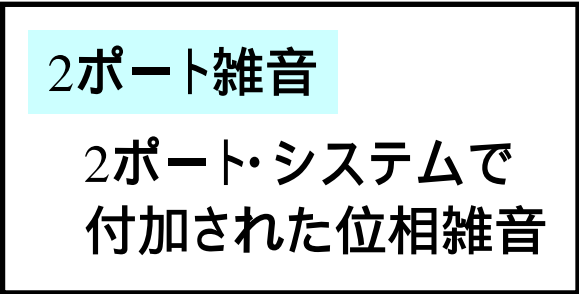
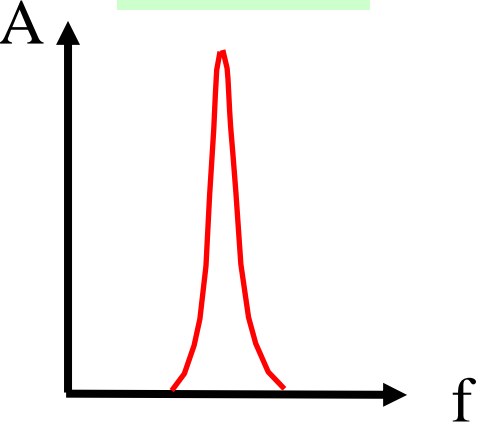
2ポート雑音と絶対雑音



絶対雑音



絶対雑音



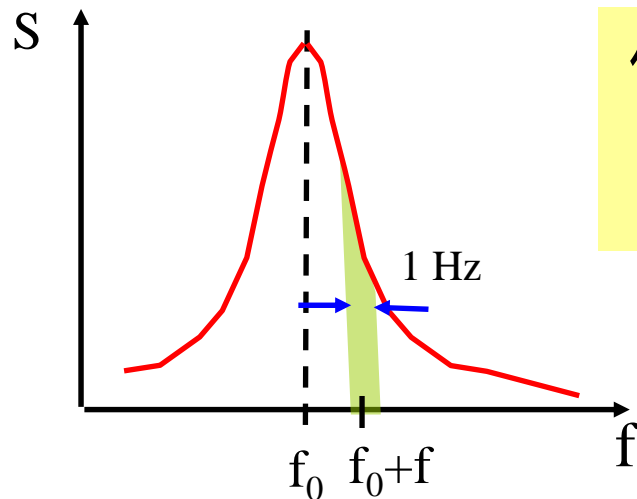
位相雑音の評価

通常, SSB位相雑音 $L(f)$ を使用

SSB位相雑音 $L(f)$ (オフセット周波数 f の関数, 単位 dBc/Hz,) 位相変動によるSSB(Single Side Band)電力で定義
搬送波周波数より, f Hz離れた周波数での1Hz帯域幅での電力
信号の総電力で規格化する

$$L(f) = \frac{\text{(中心周波数} + f \text{ Hz)での1Hzバンド幅の電力}}{\text{信号の全電力}}$$
$$= 10 \log_{10} \frac{\text{(中心周波数} + f \text{ Hz)での1Hzバンド幅の電力}}{\text{信号の全電力}} \quad (\text{dBc/Hz})$$

オフセット周波数を
決めないと,
 $L(f)$ は決まらない.

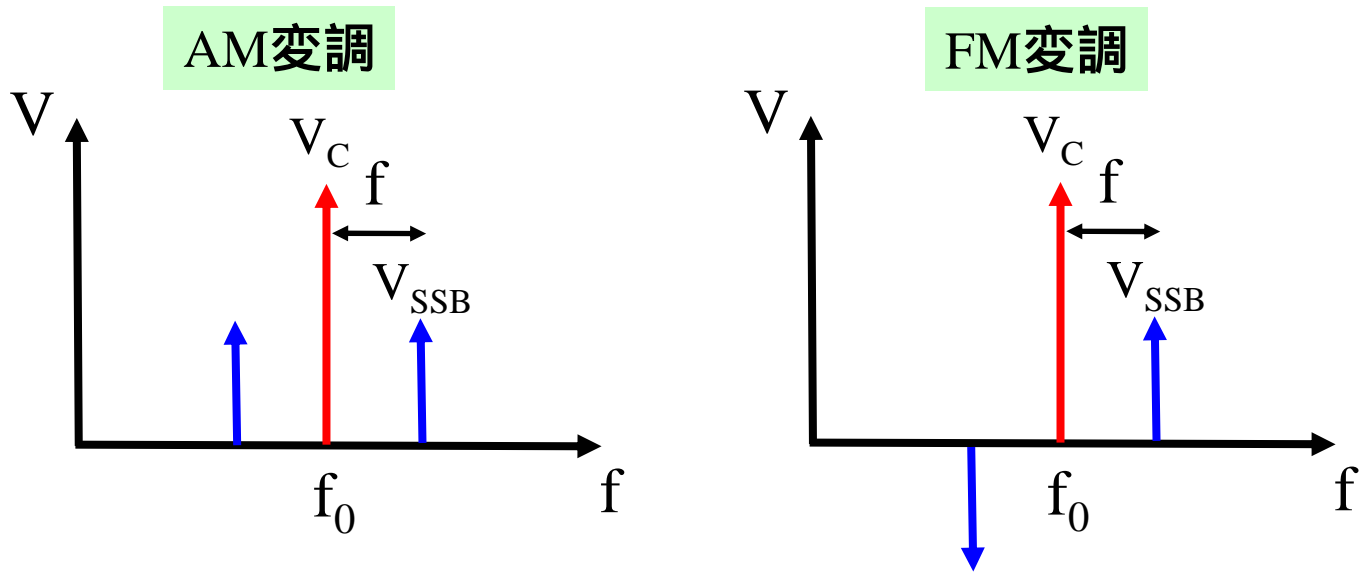


信号の全電力は, 中心周波数の電力で近似可能

$$P_{sig} = \int_0^{\infty} S(f) df \approx \int_{f_0 - 0.5\text{Hz}}^{f_0 + 0.5\text{Hz}} S(f) df \approx S(f_0)$$

AM雑音の評価

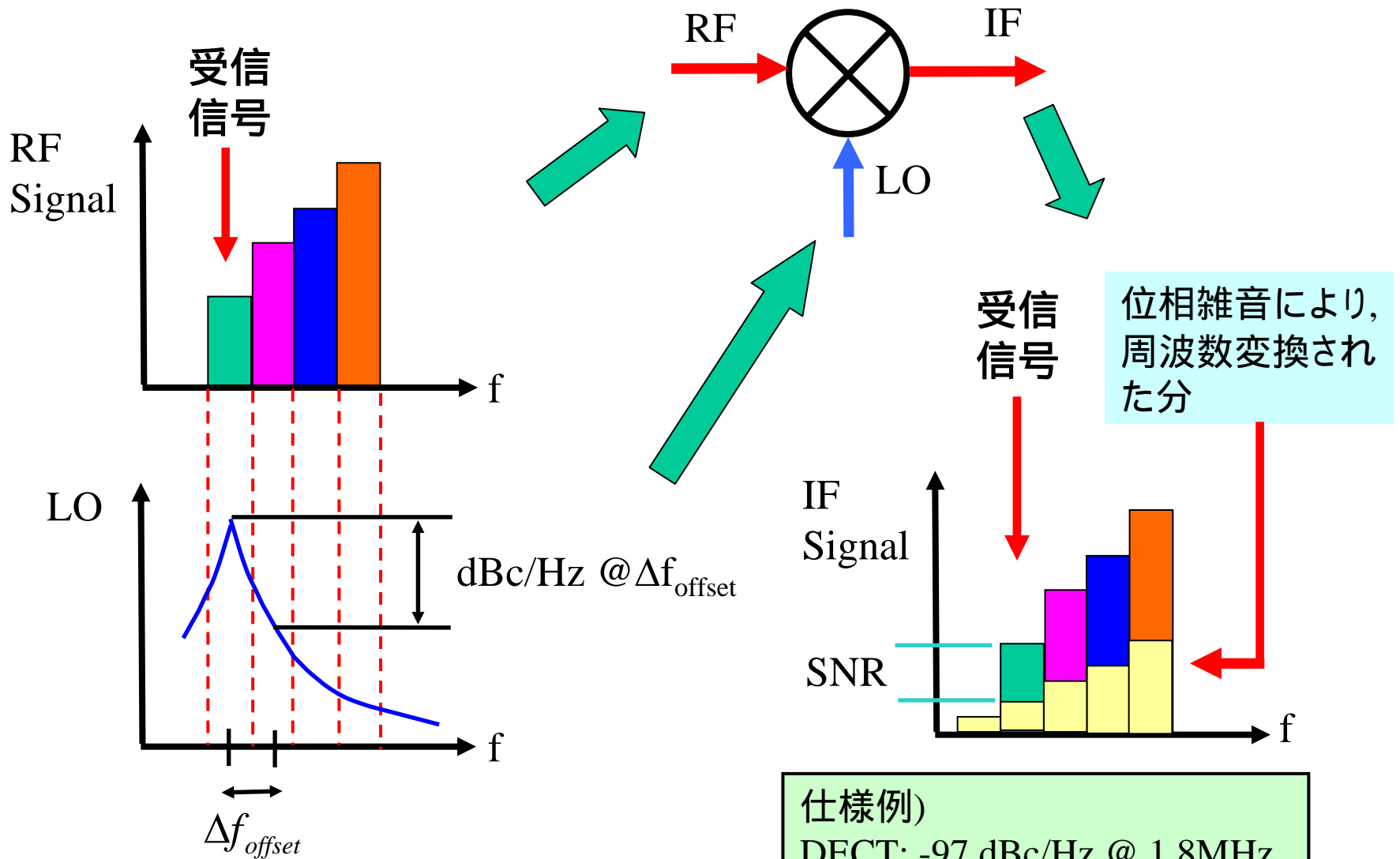
$$S_A(f) = \frac{\text{AM変調サイドバンドの1Hzバンド幅の電力}}{\text{信号の全電力}}$$



位相雑音の正確な評価には、AM雑音とPM雑音の区別が必要
単なるスペクトラム・アナライザでは不可能

2.位相雑音の重要性

周波数分割多重通信受信システム



仕様例)
 DECT: -97 dBc/Hz @ 1.8MHz
 GSM : -121 dBc/Hz @ 600kHz
 -112 dBc/Hz @ 200kHz

3.位相雑音のモデル

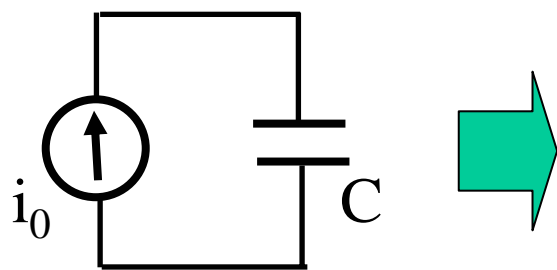
位相雑音のモデル

ランダム雑音による周波数変調 (Frequency Modulation, FM)

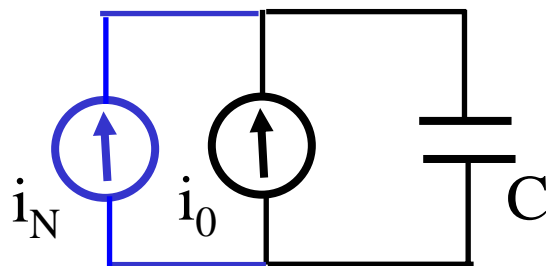
$$V_{sig}(t) = A \sin[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\pi\Delta f \cos 2\pi f t \quad \leftarrow \text{FM変調}$$

$$\phi(t) = \frac{\Delta f}{f} \sin 2\pi f t$$



$$f_0 = \frac{1}{2\tau_d} = \frac{i_0}{2CV_{sig}}$$



$$f_0 + \Delta f = \frac{i_0 + i_N}{2CV_{sig}}$$

$$\Delta f = \frac{i_N}{2CV_{sig}}$$

電流ノイズによるFM変調

位相スペクトラム密度 $S_\phi(f)$

f HzでFM変調したときの1Hz帯域幅での位相変動の2乗平均
単位: rad^2/Hz

$$\begin{aligned}\langle \phi(t)^2 \rangle &= 2\pi f \int_0^{1/2\pi f} \phi(t)^2 dt \\ &= 2\pi f \left(\frac{\Delta f}{f} \right)^2 \int_0^{1/2\pi f} \sin^2 2\pi f t dt = \frac{\Delta f^2}{2f^2} \end{aligned}$$

← 単一周波数でのFM変調

実際は、ランダム・ノイズは連続スペクトルをもつので、多数の周波数成分でのFM変調になる。

$$\begin{aligned}\Delta f(f) &= \frac{\sqrt{\langle i_N(f)^2 \rangle} df}{2CV_{sig}} \\ \langle \phi(t)^2 \rangle &= \frac{\Delta f(f)^2}{2f^2} = \frac{\langle i_N(f)^2 \rangle}{2f^2 (2CV_{sig})^2} df = S_\phi(f) df\end{aligned}$$

高周波によるFM変調の方が位相変動が小さくなる

微小角近似による解析

$$\phi(t) = -\frac{\Delta f}{f} \cos 2\pi f t = \phi_p \cos 2\pi f t$$

$$V_{sig}(t) = A \sin[2\pi f_0 t + \phi(t)] = A \sin[2\pi f_0 t + \phi_p \sin 2\pi f t]$$

ベッセル関数 $J_n(x)$ を用いると,

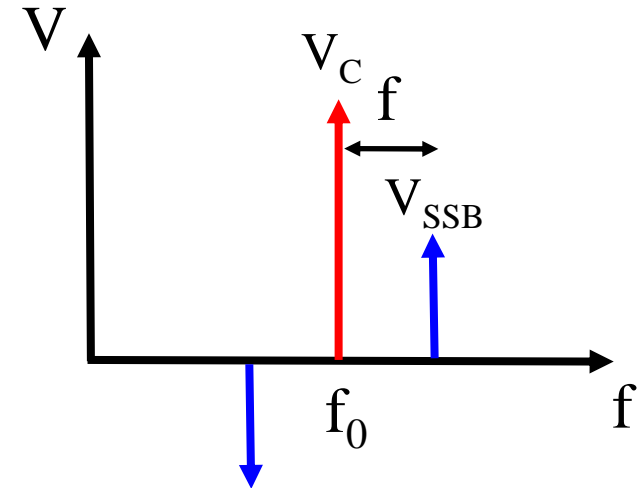
$$V_{sig}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\phi_p) \sin[2\pi(f_0 + nf)t]$$

微小角近似 $\phi_p \ll 1 \text{ rad}$ を用いると,

$$\begin{aligned} V_{sig}(t) &\approx A J_0(\phi_p) \sin(2\pi f_0 t) \\ &\quad + A J_1(\phi_p) \sin[2\pi(f_0 + f)t] \\ &\quad - A J_1(\phi_p) \sin[2\pi(f_0 - f)t] \end{aligned}$$

$J_0(x) \approx 1, J_1(x) \approx x/2$ ($x \approx 0$) より,

$$\begin{aligned} V_{sig}(t) &\approx A \sin(2\pi f_0 t) \\ &\quad + A(\phi_p / 2) \sin[2\pi(f_0 + f)t] \\ &\quad - A(\phi_p / 2) \sin[2\pi(f_0 - f)t] \end{aligned}$$



$$\left| \frac{V_{SSB}}{V_C} \right| = \left| \frac{J_1(\phi_p)}{J_0(\phi_p)} \right| \approx \left| \frac{\phi_p}{2} \right| = \frac{\Delta f}{2f}$$

L(f)と $S_\phi(f)$ の関係

微小角近似

$$\frac{V_{SSB}}{V_C} = \frac{J_1(\phi_p)}{J_0(\phi_p)} \approx \frac{\phi_p}{2} = \frac{\Delta f}{2f}$$

$$\frac{P_{SSB}(f)}{P_C} = \frac{V_{SSB}^2}{V_C^2} = \frac{\phi_p^2}{4} = \frac{(\sqrt{2} \phi_{RMS})^2}{4} = \frac{S_\phi(f) df}{2}$$

$$\phi_{RMS}(f) = \frac{\phi_p(f)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\langle \phi(t)^2 \rangle} = \sqrt{S_\phi(f) df}$$

$$L(f) \approx \frac{P_{SSB}(f) |_{df=1\text{Hz}}}{P_C} = \frac{S_\phi(f)}{2}$$

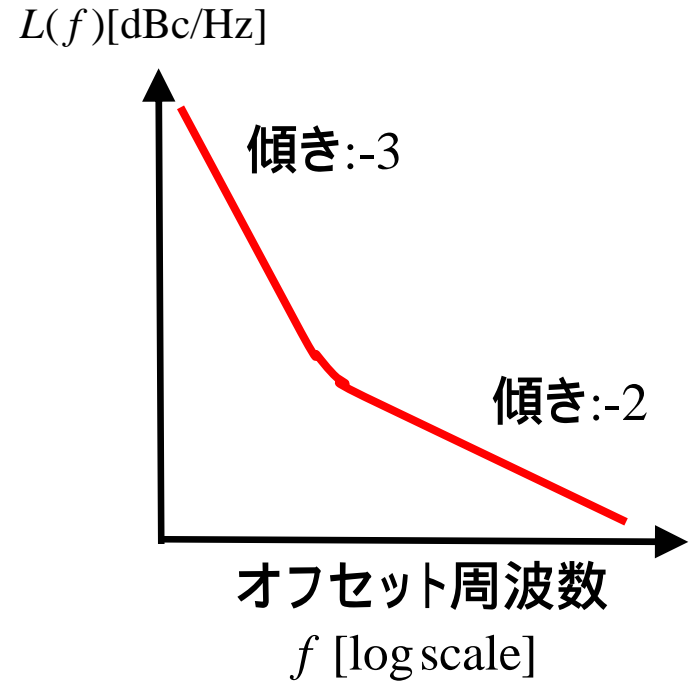
注意) 微小角近似が成立する領域でのみ成立

L(f)と雑音特性

$$L(f) \approx \frac{P_{SSB}(f)|_{df=1\text{Hz}}}{P_C} = \frac{S_\phi(f)}{2}$$

$$S_\phi(f)df = \frac{\Delta f(f)^2}{2f^2} = \frac{\langle i_N(f)^2 \rangle}{2f^2(2CV_{sig})^2} df$$

→
$$L(f) = \frac{\langle i_N(f)^2 \rangle}{4f^2(2CV_{sig})^2}$$



CMOS発振回路の位相雑音

白色雑音 → $L(f) \propto f^{-2}$

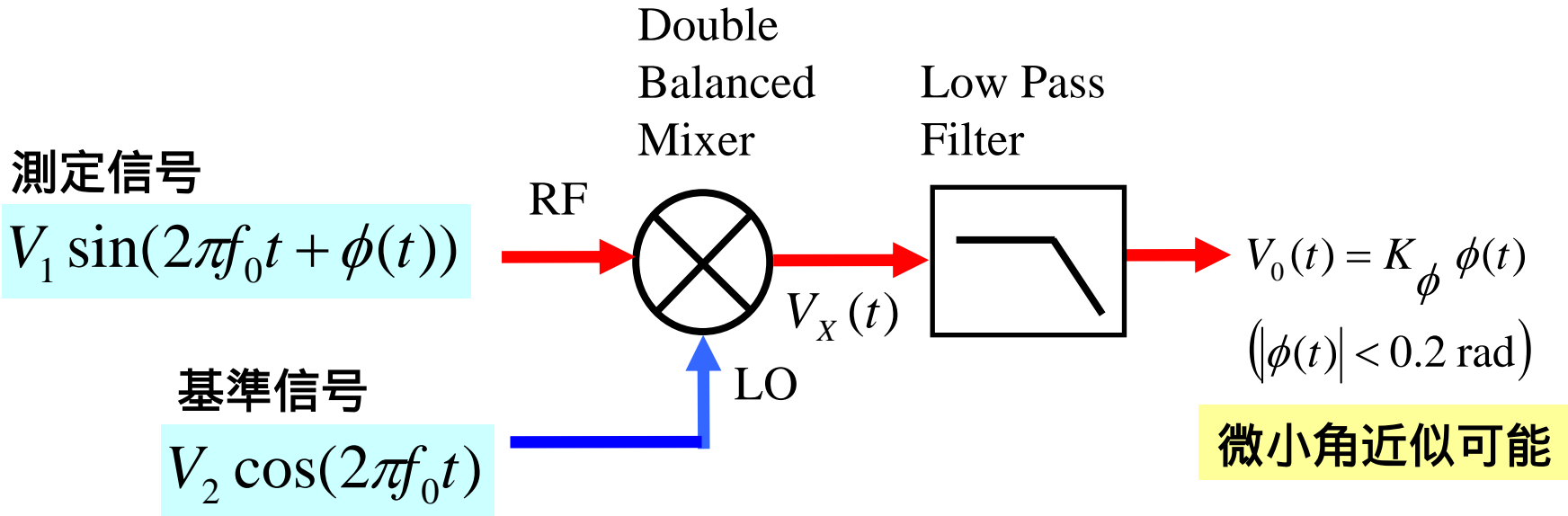
1/f 雑音 → $L(f) \propto f^{-3}$

$$L(f) \propto V_{sig}^{-2} \propto 1/P_{sig}$$

信号電力に逆比例

4.位相雑音の測定原理

位相雑音の測定原理



$$V_X(t) = V_1 V_2 \sin(2\pi f_0 t + \phi(t)) \cos(2\pi f_0 t) = \frac{V_1 V_2}{2} \left[\underbrace{\sin(4\pi f_0 t + \phi(t))}_{\text{高周波}} + \underbrace{\sin(\phi(t))}_{\text{低周波}} \right]$$

$$V_0(t) = \frac{V_1 V_2}{2} \sin(\phi(t)) \approx \frac{V_1 V_2}{2} \phi(t) = K_\phi \phi(t)$$

基準信号の位相変動は、測定信号より十分小さくする。